

# Neodređeni integral

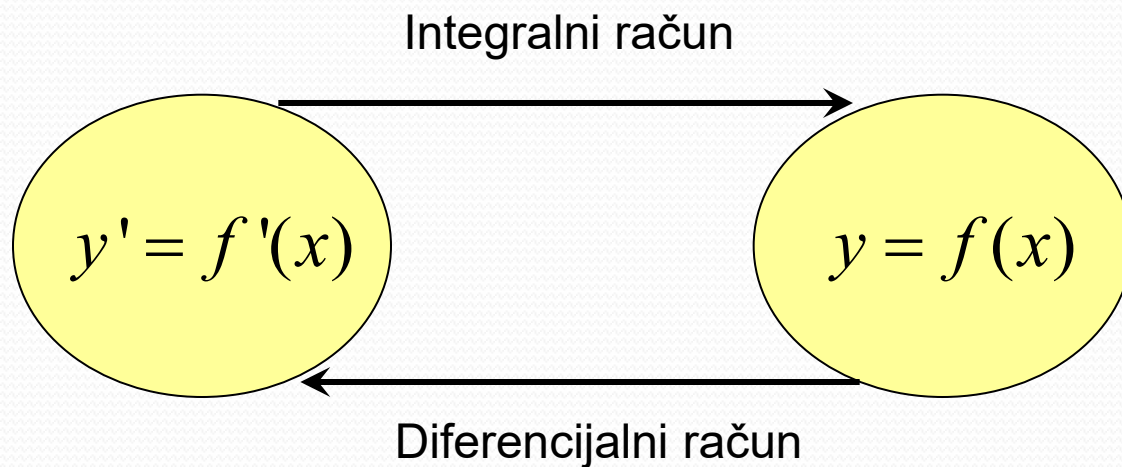
# Integralni račun

Jedan od osnovnih zadataka diferencijalnog računa je određivanje izvoda ili diferencijala date funkcije. Ali, ako se postavi obrnuti problem, određivanje funkcije kojoj je poznat izvod ili diferencijal, dolazi se do integralnog računa.

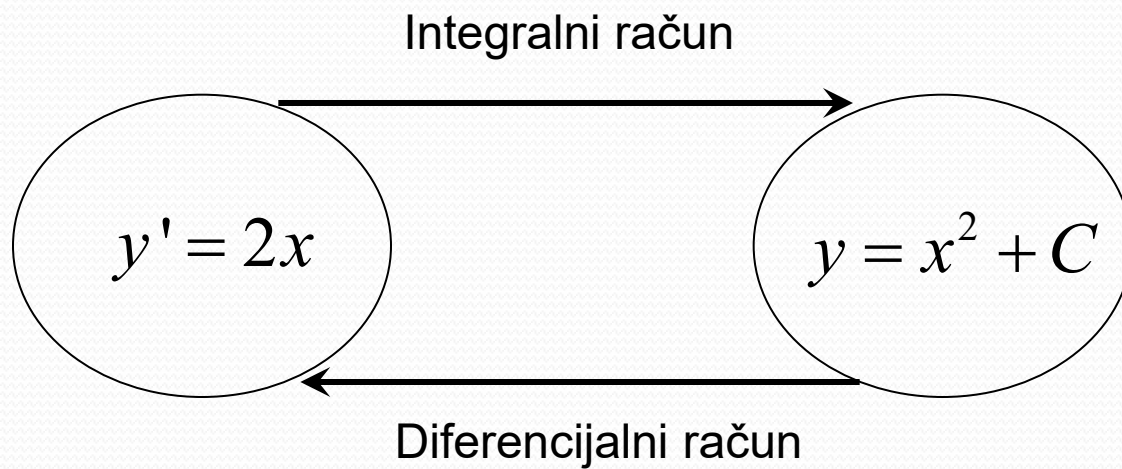
Pitanja koja se sada mogu postaviti i potražiti odgovor na njih su sledeća:

1. Da li svaka funkcija može biti izvod neke druge funkcije ?
2. Ako ta funkcija postoji da li je jednoznačna ?
3. Ako ta funkcija postoji, kako da je odredimo?

# INTEGRALNI RAČUN



# Primer



# INTEGRALNI RAČUN

- Osnovni pojmovi
- Pravila i osobine
- Tablica integrala
- Neke metode za rešavanje

# Primitivna funkcija

- Neka je funkcija  $f(x)$  definisana na intervalu  $(a,b)$ . Funkcija  $F(x)$  zove se **primitivna funkcija** funkcije  $f(x)$  akko je  $F'(x) = f(x)$  ili  $d F(x) = f(x) dx$
- Ako je funkcija  $F(x)$  primitivna funkcija funkcije  $f(x)$  na intervalu  $(a,b)$  tada je bilo koja funkcija oblika  $F(x) + c$  takođe primitivna funkcije  $f(x)$ , pri čemu je  $c$  proizvoljna konstanta.

**Napomena:** primitivna funkcija nije jednoznačno određena već je u pitanju familija krivih koje se razlikuju za konstantu  $c$ .

Функција  $F(x)$  је **примитивна функција** функције  $f(x)$  на неком интервалу, ако је  $F(x)$  диференцијабилна на том интервалу и за свако  $x$  из тог интервала важи

$$F'(x) = f(x).$$

Ако је  $F(x)$  примитивна функција функције  $f(x)$  на неком интервалу, тада било која друга њена примитивна функција  $\Phi(x)$  има облик

$$\Phi(x) = F(x) + c,$$

где је  $c \in \mathbb{R}$  произвољна константа.

Ако су функције  $F(x)$  и  $\Phi(x)$  примитивне функције функције  $f(x)$ , тада је

$$\Phi(x) - F(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

(Примитивне функције неке функције  $f$  разликују се за константу.)

# Definicija neodređenog integrala

Skup svih primitivnih funkcija funkcije  $f(x)$  na intervalu  $(a, b)$  zove se **neodređeni integral** i obeležava se:

$$\int f(x) dx \text{ odnosno } \int f(x) dx = F(x) + C.$$

Скуп свих примитивних функција функције  $f(x)$  је неодређени интеграл те функције.

$$\{F(x) \mid F'(x) = f(x)\} = \int f(x) dx$$



# Definicija integrala

$$\int f(x)dx = F(x) + C \stackrel{def}{\Leftrightarrow} (F(x) + C)' = f(x)$$

$\int$  - znak za integralni račun

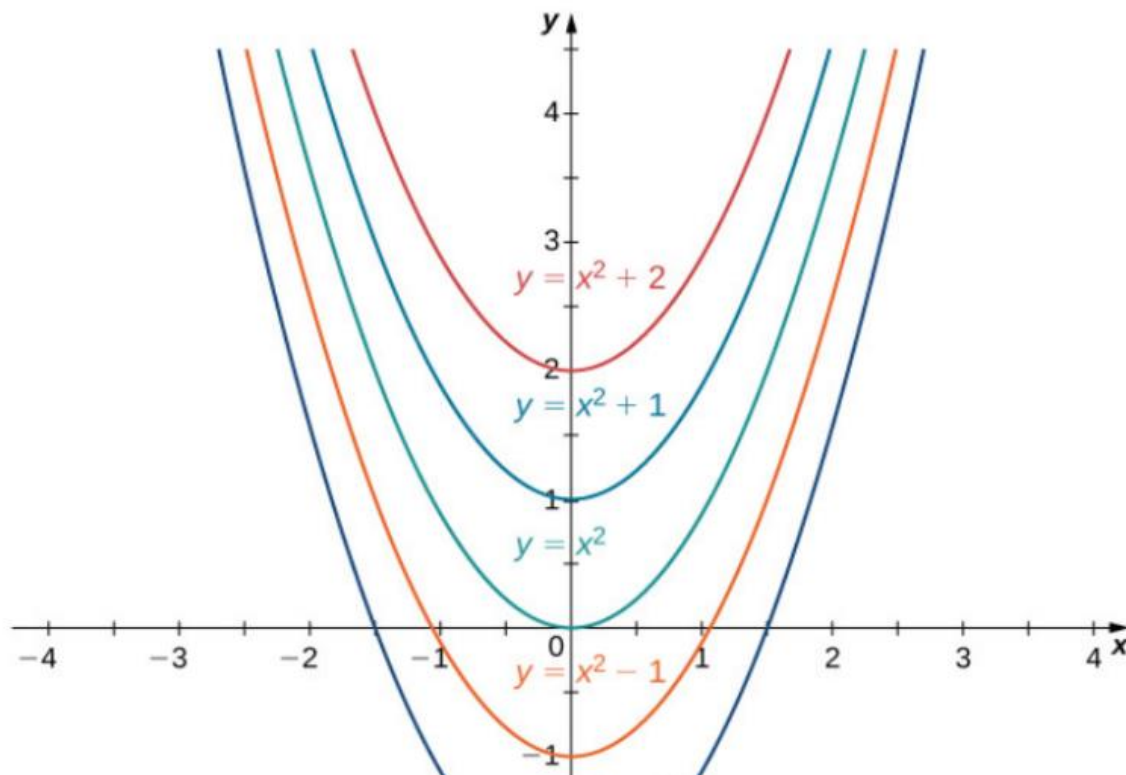
$f(x)$  - podintegralna funkcija

$dx$  - diferencijal nezavisno promenljive

$F(x) + C$  - skup primitivnih funkcija

$$\int 2x \, dx = x^2 + c$$

Неопређени интеграл функције  $2x$  је скуп бесконачно много парабола облика  $x^2 + c$ .



# Osnovna pravila integracije

$$1. \int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$$

$$2. \int Cf(x) dx = C \int f(x) dx$$

# Osobine integrala

$$1. \quad \left( \int f(x) dx \right)' = f(x)$$

$$2. \quad d \left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

# Osobine integrala

Svaka neprekidna funkcija  $f(x)$  na intervalu  $(a, b)$  ima na tom intervalu *primitivnu funkciju*  $F(x)$ .

**Diferencijal neodređenog integrala** jednak je podintegralnom izrazu.

$$d \int f(x) dx = f(x) dx, \quad \left( \int f(x) dx \right)' = f(x).$$

**Neodređeni integral diferencijala** neke funkcije jednak je podintegralnoj funkciji:

$$\int d(f(x)) = f(x) + C \quad \int f'(x) dx = f(x) + C.$$

# Tablica integrala

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

# Tablica integrala

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + c, \quad \left( \int \frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccos} x + c \right)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c, \quad \left( \int \frac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{arcctg} x + c \right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$$

# Primeri-Neposredna integracija

- Izračunavanje nekih integrala neposrednom integracijom :

$$1. \int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} = x^3 + C$$

$$2. \int (x^3 - 2x^2 + 2x - 1) dx = \int x^3 dx - 2 \int x^2 dx + 2 \int x dx - \int dx = \\ \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3} x^3 + x^2 - x + C$$

$$3. \int \frac{6 + 2x + x^2}{x^4} dx = 6 \int x^{-4} dx + 2 \int x^{-3} dx + \int x^{-2} dx = 6 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} + 2 \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{-1}}{-1} = \\ -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + C$$



# Metoda smene

U nekim slučajevima i pored toga što znamo da postoji primitivna funkcija funkcije  $f(x)$  ne možemo metodom neposredne integracije izračunati njen neodređeni integral. U takvim slučajevima se često koristi metoda smene.

1. Neka je  $f(x)$  složena funkcija promenljive  $t$ , tj.  $f(x) = f(g(t))$ . Smenom  $x = g(t)$  gde je funkcija  $g(t)$  neprekidna sa neprekidnim izvodom i inverznom funkcijom  $t = g^{-1}(x)$ , dobijamo

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt .$$

# Metoda smene

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

$$x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt$$

# Primeri-Metoda smene

$$1. \int (x+5)^{10} dx = \left| \begin{array}{l} x+5=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int t^{10} dt = \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{(x+5)^{11}}{11} + C$$

$$2. \int \cos(3x+2) dx = \left| \begin{array}{l} 3x+2=t \\ 3dx=dt \\ dx=\frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \sin t + C = \frac{1}{3} \sin(3x+2) + C$$

# Metoda parcijalne integracije

*Metod parcijalne integracije se dobija iz pravila za izvod proizvoda dve funkcije.*

$$d(u(x) \cdot v(x)) = v(x) \cdot du + u(x) \cdot dv,$$

pa je

$$d(u(x) \cdot v(x)) - v(x)du = u(x)dv, x \in A.$$

Ako integralimo prethodni izraz dobijamo

$$\int (d(u(x) \cdot v(x)) - v(x)du) = \int u(x)dv.$$

$$\int u(x)dv = \int d(u(x) \cdot v(x)) - \int v(x)du.$$

# Metoda parcijalne integracije

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Ako obeležimo sa  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  diferencijabilne funkcije, onda je

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

# Metoda parcijalne integracije

Primena metode parcijalne integracije naročito se preporučuje u sledećim slučajevima:

- kada se integrali proizvod jedne polinomske funkcije i jedne funkcije eksponencijalnog tipa, za  $u$  se uzima polinomska funkcija, a za  $v'$  se uzima funkcija eksponencijalnog tipa;
- kada se integrali proizvod jedne polinomske funkcije i jedne trigonometrijskog tipa, za  $u$  se uzima funkcija polinomskeg tipa, a za  $v'$  funkcija trigonometrijskog tipa;
- kada se integrali proizvod jedne funkcije trigonometrijskog tipa i jedne funkcije eksponencijalnog tipa, tada je potpuno svejedno šta se uzima za  $u$ , a šta za  $v'$ , ali se do kraja principijelno mora primenjivati izabrana varijanta;
- kada integralimo proizvod jedne polinomske funkcije i jedne funkcije logaritamskog tipa, za  $u$  uzećemo funkciju logaritamskog tipa, a za  $v'$  funkciju polinomskeg tipa;
- kada integralimo proizvod jedne polinomske funkcije i jedne inverzne trigonometrijske funkcije, za  $u$  uzećemo inverznu trigonometrijsku funkciju, a za  $v'$  funkciju polinomskeg tipa.

# Primer-Parcijalna integracija

Izračunati integrale:

$$\int x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} \cos x \, dx = dv \Rightarrow v = \int \cos x \, dx = \sin x \\ x = u \quad \quad \quad \Rightarrow du = dx \end{array} \right|$$

$$= uv - \int v \, du$$

$$= x \sin(x) - \int \sin(x) \, dx$$

$$= x \sin(x) + \cos(x) + C$$

# Zadaci za samostalni rad

1. Izračunati sledeće integrale :

a)  $\int (5x^3 - 4x^2 - 3x + 5) dx$

b)  $\int (3x^3 - x^2 + \ln x + e^{2x} + 9x + 8) dx$

2. Proveriti rezultate :

a)  $\int e^{-x^3} x^2 dx = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C$

b)  $\int x \sin x dx = -x \sin x + \sin x + C$

c)  $\int x^4 \ln x dx = \frac{x^5 \ln x}{5} - \frac{x^5}{25} + C$

3. Izračunati sledeći integral :  $\int (5 - 2x)^9 dx$  i  $\int \frac{dx}{5 - x}$